

RAQUEL DE AZEVEDO

## O CONCEITO DE CRISE EM MARX E SUA EXPRESSÃO NO CÁLCULO DIFERENCIAL

Recebido em 17/07/2023

Aprovado em 27/10/2023

# O CONCEITO DE CRISE EM MARX E SUA EXPRESSÃO NO CÁLCULO DIFERENCIAL

## Resumo

Este trabalho parte da inversão lógica entre as formas com que Karl Marx e John Maynard Keynes concebem a crise do capital: se a tradição keynesiana se caracteriza por uma crítica que decorre da crise, em Marx é a crítica dos conceitos da Economia Política que lhe permite elaborar um conceito de crise. Na segunda seção do artigo, procuramos enfatizar o percurso que Marx realiza não apenas para estabelecer um conceito formal de crise a partir da crítica, como também para explicitar o conteúdo específico da crise do capital. Em seguida, indicamos como o conceito de crise pode ser traduzido na estrutura matemática do cálculo diferencial, mais precisamente na definição de infinitesimais estabelecida por Leibniz. Por fim, mostramos que, dada a inversão entre as teorias marxista e keynesiana, a crítica é inseparável de uma noção de transição de modo de produção.

**Palavras-chave:** Marx; Keynes; Leibniz; crise; crítica; infinitesimais; transição

## RAQUEL DE AZEVEDO

Professora do Instituto de Economia e Relações Internacionais da Universidade Federal de Uberlândia.

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-7373-3104>

Este trabalho é dedicado ao professor Idaleto Aued, cujas aulas, já tão distantes no tempo, seguem sempre tão presentes.

## **Abstract**

This paper assumes as its starting point the logical inversion between the ways in which Karl Marx and John Maynard Keynes conceive the crisis of capital: if the Keynesian tradition is characterized by a critique that arises from the crisis itself, in Marx it is the critique of Political Economy concepts that allows him to elaborate a concept of crisis. In the second section of the paper, we emphasize the path taken by Marx not only to establish a formal concept of crisis based on his critique, but also to explain the specific content of the crisis of capital. Then, we indicate how the concept of crisis can be translated into the mathematical structure of differential calculus, more precisely into the definition of infinitesimals established by Leibniz. Finally, we show that, given the inversion between Marxist and Keynesian theories, critique is inseparable from a notion of transition in the mode of production.

**Keywords:** Marx; Keynes; Leibniz; crisis; critique; infinitesimals; transition

**JEL:** B14; B40; H12; P10; P20

## I. Crítica, crise e os infinitesimais

A publicação d'*A Teoria geral do emprego, do juro e da moeda*, em 1936, assume uma posição curiosa na história do pensamento econômico. A crítica à economia neoclássica em que John Maynard Keynes se formou e à ideia de que não há nenhum empecilho ao pleno emprego é lida, retrospectivamente, como uma consequência necessária da quebra da bolsa de Nova Iorque em 1929 e dos níveis persistentes de desemprego que a ela se seguiram. A novidade não está em tomarem os economistas a crise como seu objeto – aquilo que poderíamos chamar de aspecto negativo do impulso expansivo do capital ocupa um lugar mais ou menos central no pensamento econômico desde os embates entre Thomas Malthus e David Ricardo a respeito do papel do consumo improdutivo diante da superprodução de capital. É, porém, na década de 1930 que crise e crítica da teoria econômica parecem se consolidar como elementos inseparáveis, sendo função da crítica tornar a prometer um futuro que a crise parece obscurecer e negar. A questão é que a única imagem do futuro que a crítica é capaz de elaborar tão logo fica estabelecida sua inerência com a crise é a promessa de crises mais bem administradas.

Nos escritos de Karl Marx ao longo da década que antecede a publicação do Livro I d'*O Capital*, em 1867, há um movimento oposto à lógica da *Teoria geral*. Se a tradição keynesiana se caracteriza por uma crítica que decorre da crise, em Marx é a crítica dos conceitos da Economia Política que permite elaborar um conceito de crise. Como veremos, essa inversão não é trivial. A crítica de Marx aponta para o fato de que os mais categorizados representantes da Economia Política, embora possuíssem teorias complexas sobre o valor, não conseguiam passar de um conceito de valor para um conceito de capital, ou seja, para um conceito de valor se valorizando. É conhecido o circuito do capital que Marx elabora no capítulo quatro do Livro I d'*O Capital*, no qual a troca de equivalentes na circulação é compatibilizada com o surgimento de um valor excedente, desde que haja troca de não-equivalentes na produção. Marx mantém a hipótese fundamental da Economia Política de que toda ida ao mercado corresponde a uma

mercadoria que se troca, via de regra, por seu valor, desde que o capital encontre nesse mesmo mercado uma forma-valor especial, uma mercadoria que, em uso no processo produtivo, é ela própria fonte de valor (produz mais valor do que aquele que ela custa inicialmente ao capitalista). Somente sob essas condições, a troca de equivalentes no mercado pode incluir o surgimento de um excedente. Mas, para entender o conceito de crise que Marx obtém a partir da crítica, importa menos o circuito acabado do que o procedimento para construí-lo a partir do conceito de valor.

Na segunda seção deste artigo, enfatizaremos o percurso de Marx na elaboração de seu conceito de crise a partir da crítica da Economia Política. Como veremos, as formas de manifestação da crise são a interrupção da circulação das mercadorias e a desproporção das trocas entre os setores de produção de meios de produção e de produção de meios de consumo. Por sua vez, o conteúdo que vem à tona de maneira violenta nessas duas formas da crise diz respeito à característica fundamental da reprodução do capital, em que o homem enquanto trabalhador é progressivamente substituído pela aplicação tecnológica da ciência na mediação com o trabalho passado. Como se sabe, Marx explica que essa contradição não implica redução absoluta da parte variável do capital total, mas apenas decréscimo relativo da parte variável em relação à parte constante na acumulação. Com isso, o número de trabalhadores que o capital emprega, a massa absoluta de trabalho que mobiliza e, portanto, o excedente de que se apropria podem crescer de maneira contínua apesar da queda progressiva na taxa de lucro. A questão é que, com o desenvolvimento da produtividade social do trabalho, uma massa cada vez maior de capital é necessária para pôr em movimento a mesma quantidade de força de trabalho e para extrair a mesma quantidade de mais-valia<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Minha opção pelo uso do termo mais-valia em lugar de mais-valor se deve ao fato de que, apesar de mais-valor ser uma tradução mais literal da palavra alemã *Mehrwert*, algo se perde, em termos de conteúdo, ao abandonarmos o primeiro termo (já consagrado no marxismo brasileiro). A própria estranheza da palavra mais-valia parece exercer um papel complementar na compreensão do conceito que ela expressa. Com o uso do termo mais-valia, o valor criado pela classe trabalhadora que excede os salários que lhe foram adiantados carrega um estranhamento. Não denota uma simples divisão mecânica da jornada de trabalho entre trabalho necessário e trabalho excedente, mas indica que durante toda jornada de trabalho a classe trabalhadora produz a propriedade de outro e a sua não-propriedade. Entendo que o estranhamento da palavra expressa bem o estranhamento da classe trabalhadora no processo produtivo.

Esse arranjo complexo que está na origem da possibilidade formal da crise, isto é, a combinação entre a redução relativa do capital variável e o aumento absoluto do capital total num ritmo superior ao da queda na taxa de lucro, pode ser traduzido na estrutura matemática do cálculo diferencial. Mais precisamente, na definição estabelecida por Leibniz para os infinitesimais. Ao descreverem problemas que envolvem uma transformação contínua entre um caso-limite e os termos que ele limita, os infinitesimais se configuram, nos escritos de Leibniz, não apenas como uma ferramenta matemática para lidar com a antiga questão do método de exaustão de Arquimedes, mas como operadores da transição de um objeto a outro. Na terceira seção deste artigo, indicamos como a utilização dos infinitesimais por Leibniz pode contribuir para a compreensão do problema da redução relativa do capital variável em Marx – fundamento da crise e também de um pensamento sobre a transição de modos de produção. Na quarta e última seção, mostramos que, dada a inversão entre as teorias marxista e keynesiana, a crítica é inseparável de uma noção de transição de modo de produção.

## **2. Crise como manifestação da unidade**

Há no capítulo “A mercadoria” um roteiro em três passos em que Marx explica como se dá a passagem do conceito de valor ao conceito de capital. É percorrendo esse roteiro que Marx aponta, a um só tempo, o limite das formulações da Economia Política e a emergência de um conceito formal de crise. Seu ponto de partida é aquilo que há de mais imediato para a Economia Política: o valor de troca, a relação quantitativa entre duas mercadorias distintas. Duas coisas qualitativamente diferentes só podem estar em relação se forem expressões de uma substância comum. Pondo-se de lado o valor de uso das mercadorias, ou seja, as necessidades humanas que satisfazem independentemente da forma como são produzidas, só resta em comum entre elas a propriedade de serem produtos do trabalho. Não o trabalho específico do fiandeiro ou do tecelão – ou qualquer outra forma

concreta de trabalho. Duas mercadorias só se opõem na troca porque podem ser reduzidas a diferentes quantidades de trabalho humano abstrato, ou, como diz Marx, dispêndio humano produtivo de cérebro, músculos, nervos, mãos. Mas não basta dizer que trabalho abstrato cria valor. Para Marx, o valor de uma mercadoria é determinado pelo tempo de trabalho médio necessário para a sua produção no ramo a que está vinculada.

Da forma imediata, o valor de troca, passa-se, assim, para a substância comum entre duas mercadorias, o valor. O último passo, aquele que a Economia Política não percorreu, é retornar ao valor de troca não mais como uma relação quantitativa puramente casual, mas como forma de manifestação do valor. É por não dar esse passo que a Economia Política se comporta como um saber exterior ao seu objeto, incapaz de desdobrar determinações mais complexas das mais simples. Na nota 32 do capítulo “A mercadoria”, Marx explica que sua diferença com a Economia Política consiste no fato de que Adam Smith e David Ricardo não percorreram o caminho de volta ao valor de troca como forma de manifestação do valor:

Uma das falhas principais da economia política clássica é não ter conseguido deavassar – partindo da análise da mercadoria e, particularmente, do valor da mercadoria – a forma do valor, a qual o torna valor de troca. Seus mais categorizados representantes, como A. Smith e Ricardo, tratam com absoluta indiferença a forma do valor ou consideram-na mesmo alheia à natureza da mercadoria. O motivo não decorre apenas de a análise da magnitude do valor absorver totalmente sua atenção. Há uma razão mais profunda. A forma do valor do produto do trabalho é a forma mais abstrata, mais universal, do modo de produção burguês, que, através dela, fica caracterizado como uma espécie particular de produção social, de acordo com sua natureza histórica. A quem considere esse modo de produção a eterna forma natural da produção social, escapará, necessariamente, o que é específico da forma do valor e, em consequência, da forma mercadoria e dos seus desenvolvimentos posteriores, a forma dinheiro, a forma capital etc. (MARX, 2004, p. 102)

Marx insiste que este último passo, retornar ao valor de troca como forma de manifestação do valor, corresponde ao entendimento do caráter histórico

da produção capitalista. O que isso significa? Antes, vale mencionar o aspecto histórico que Marx associa ao próprio conceito de valor. Marx lembra que Aristóteles analisa a forma do valor na seção sobre a justiça de *Ética a Nicômaco*, mas não chega a um conceito de valor porque o fundamento da sociedade grega é a desigualdade entre os homens e de suas forças de trabalho. Com Smith e Ricardo é diferente: ambos elaboram uma teoria do valor, pois a divisão do trabalho tipicamente capitalista já havia se desenvolvido a tal ponto no interior das fábricas que a homogeneidade dos trabalhos – a sua comparabilidade – se torna um dado objetivo da forma social capitalista. Mais do que isso: a igualdade dos trabalhos permite inclusive que a ideia política de igualdade humana adquira uma consistência de convicção popular, como se vê na disseminação dos ideais da Revolução Francesa. Mas resta ainda a pergunta: por que, para Marx, a compreensão da forma do valor é o que permite que se evite a naturalização do sistema capitalista, como o faz a Economia Política? Em que medida a exposição que Marx percorre – passar do valor de troca ao valor e novamente ao valor de troca como forma de manifestação do valor – permite compreender a mudança qualitativa do modo de produção capitalista em relação aos modos de produção anteriores?

Para Marx, a forma do valor é o desdobramento em uma oposição externa da oposição interna que caracteriza a mercadoria – que é ser um valor de uso que é veículo de valor. O valor só se dá a ver na oposição externa de duas mercadorias no mercado; ele não está associado a nenhum aspecto material da mercadoria. Se uma mercadoria qualquer fosse decomposta em suas partes mais simples, nenhum átomo de valor seria encontrado. Só se pode saber algo sobre o valor na medida em que a oposição interna com que Marx define a mercadoria encontra uma forma externa para se desdobrar<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Sobre o procedimento de Marx de apresentar uma oposição ou uma contradição interna através de seu desdobramento externo, vale mencionar a analogia com a elipse no capítulo 3 do Livro I d'*O Capital*. "já vimos que a troca de mercadorias encerra elementos contraditórios e mutuamente exclusivos. A diferenciação das mercadorias em mercadorias e dinheiro não faz cessar essas contradições, mas gera a forma dentro da qual elas podem se mover. Esse é, afinal de contas, o método de solucionar contradições reais. É uma contradição, por exemplo, ser um corpo, continuamente, atraído e repellido por outro. A elipse é uma das formas de movimento em que essa contradição se dá e se resolve ao mesmo tempo". (MARX, 2004, p. 131)



Com o desenvolvimento da troca, os dois polos da forma do valor aparecem progressivamente como elementos relativamente independentes. No capítulo “A mercadoria”, Marx apresenta os estágios pelos quais se formam esses dois polos. Na forma dinheiro do valor, em que se opõem mercadoria e dinheiro, cristaliza-se a autonomia relativa de cada lado da relação: as mercadorias expressam seu valor numa única mercadoria que ocupa a função de equivalente geral e o dinheiro empresta seu corpo para expressar o valor de todas as mercadorias produzidas na economia. É preciso notar que os polos se excluem mutuamente (cada um exerce uma função exclusiva), mas também se determinam reciprocamente (são a manifestação externa de uma unidade interna). Essa simultaneidade entre unidade e separação também se verifica entre os polos do circuito de circulação de mercadorias – venda, de um lado, e compra, de outro. Venda e compra se tornam igualmente processos relativamente independentes entre si, embora a metamorfose das mercadorias só se complete com a unidade subsequente dos dois processos. Nas *Teorias da mais-valia*, Marx argumenta que é nesse duplo caráter do desenvolvimento da forma do valor no circuito das mercadorias – envolver, a um só tempo, unidade e separação – que está posta a possibilidade formal da crise enquanto interrupção da circulação.

O conceito formal de crise, para Marx, é, assim, a manifestação violenta da unidade dos opostos, é a destruição à força da independência recíproca assumida pelas duas fases complementares da metamorfose das mercadorias. “A crise”, resume Marx, “revela a unidade dos elementos que passaram a ficar independentes uns dos outros. Não ocorreria crise se não existisse essa unidade interna de elementos que parecem comportar-se com recíproca indiferença” (MARX, 1980, p. 936) Alguns representantes da Economia Política, como Jean-Baptiste Say, defendem que há um equilíbrio necessário entre vendas e compras, ou, dito de outra forma, que o vendedor conduz o comprador ao mercado, mas com isso não expressam mais do que uma tautologia, pois venda e compra não passam, neste caso, de um ato único, de uma relação mútua entre dois indivíduos polarmente opostos – o possuidor de mercadoria e o possuidor de dinheiro. A interrupção que interessa a

Marx é a dos atos de venda e compra subsequentes no tempo e no espaço. O dinheiro permite não apenas que essas fases apareçam como elementos autônomos, mas também mensura a fluidez ou o grau de interrupção da metamorfose das mercadorias. Essa é a maneira como Marx interpreta o elemento da velocidade na teoria quantitativa da moeda – e é a primeira elaboração da forma da crise n’*O Capital*:

O processo de circulação das mercadorias, isto é, seu circuito através de metamorfoses opostas, só transparece através do curso do dinheiro, e se revelam, por meio da velocidade desse curso, a velocidade da metamorfose delas, o entrelaçamento contínuo das séries de metamorfoses, a celeridade do giro social das coisas, a rapidez com que as mercadorias desaparecem da circulação e são substituídas por novas. Na velocidade do curso do dinheiro se patenteia, portanto, a unidade fluente das fases opostas e complementares: conversão da forma de uso em forma de valor e reconversão da forma de valor em forma de uso, ou, em outras palavras, a unidade dos dois processos, o de venda e o de compra. O retardamento do curso do dinheiro, ao contrário, é o sintoma de que os dois processos se dissociam e se fazem reciprocamente independentes, e reflete a paralisação da metamorfose das mercadorias, do giro social das coisas. A própria circulação não indica a origem dessa estagnação; apenas põe o fenômeno em evidência. O público, que vê, com o retardamento do uso do dinheiro, aparecer e desaparecer o dinheiro com menos frequência em todos os pontos da periferia da circulação, tende a atribuir esse fenômeno à quantidade insuficiente dos meios de circulação. (MARX, 2004, p. 147-148)

A interrupção da circulação não explica a causa da crise, apenas evidencia a possibilidade de que as duas fases, venda e compra, não se sigam sucessivamente e de que, portanto, não se complete a metamorfose das mercadorias. Voltaremos mais adiante à razão pela qual “as fases do processo entram em conflito tal que sua unidade interna só pode impor-se por meio de uma crise, de um processo violento”. (MARX, 1980, p. 937) Será preciso explicar o que muda na natureza das crises desde o fim das guerras napoleônicas. Marx argumenta, nas *Teorias da mais-valia*, que Ricardo nada sabia das crises do mercado mundial, tendo se limitado a estudar os efeitos do bloqueio

continental sobre a variação de preços na Inglaterra. Ao cessarem os desarranjos específicos causados pela guerra, as crises se tornariam fenômenos de periodicidade regular, o que significa que sua origem deveria ser procurada no funcionamento normal do capital.

Ainda que não indique a causa da crise, a interrupção da circulação de mercadorias na produção capitalista explicita de que modo Marx passa da crítica da Economia Política a um conceito de crise. Se os dois polos da circulação fossem simplesmente independentes, não seria possível uma restauração violenta de sua unidade. Se, por outro lado, fossem uma unidade, as fases tampouco se dissociariam à força, movimento que até aqui tratamos como um procedimento lógico de desdobramento em uma oposição externa da oposição interna que caracteriza a mercadoria. Mas há um aspecto histórico nas mediações lógicas com que Marx apresenta a forma do valor: a forma social capitalista exige uma separação entre produção e mercado e esse é um dos principais eixos da crítica do pensamento liberal aos monopólios associados ao mercantilismo<sup>3</sup>. Admitir que a produção tem de crescer com o mercado significa admitir a possibilidade da crise – uma vez que mercado e produção são dois fatores com autonomia relativa, ou seja, a expansão de um não corresponde necessariamente à expansão de outro. É verdade, porém, que Smith ainda não conhecia o fenômeno da superprodução. “O que conhecia eram meras crises de crédito e de dinheiro, que espontaneamente aparecem com o sistema de crédito e bancário”, diz Marx. “Na realidade vê na acumulação do capital acréscimo absoluto da riqueza geral e do bem-estar da nação.” (MARX, 1980, p. 959) O que o argumento de Smith a respeito da reciprocidade entre a expansão dos mercados e o aprofundamento da divisão do trabalho indica é apenas que na independência relativa dos dois polos está posta a possibilidade formal da crise.

---

<sup>3</sup> Adam Smith refuta a noção mercantilista de riqueza ao argumentar que não fora em razão do fornecimento de ouro e prata que a descoberta da América enriqueceu a Europa. O continente americano significou, na verdade, a abertura de um “inesgotável mercado” para a produção europeia.

A forma da crise envolve, assim, um duplo movimento: “a restauração violenta da unidade entre elementos guinados à independência e a afirmação violenta da independência de elementos que na essência formam uma unidade” (MARX, 1980, p. 949) É possível verificar esse duplo movimento desde a constituição da forma do valor até a autonomização das partes do capital social segundo as necessidades de reprodução da totalidade do sistema. O modo como o capital se distribui entre capital-dinheiro, capital-mercadoria e capital produtivo ou como se distribui entre os setores de produção de meios de produção e de produção de meios de consumo envolve, a um só tempo, a autonomia relativa que cada forma-capital adquire e a condição de momento da reprodução do capital total da sociedade que cada uma das formas-capital ocupa, de modo que a crise aparece, formalmente, como desproporcionalidade dessa distribuição. O entrelaçamento que existe entre as formas-capital é, simultaneamente, necessário e casual. A crise é a manifestação da impossibilidade da mera autonomia, explica Jorge Grespan em *O negativo do capital*; é a emergência da unidade que revela que essas formas-capital não são simplesmente diversas, mas estão postas na diferença pela unidade. Falta explicar, porém, de onde provém esse duplo movimento – isto é, a causa da crise.

Voltemos, por um instante, ao que diz Marx na nota 32 do capítulo “A mercadoria”. Como vimos, retornar ao valor de troca como forma de manifestação do valor (terceiro passo do roteiro proposto por Marx para passar do conceito de valor ao conceito de capital) aponta para um aspecto histórico do modo de produção capitalista. Considerando que a circulação se dê sem maiores interrupções, o que nela ocorre é que o valor passa de uma forma à outra em razão de uma finalidade que é externa ao próprio circuito – o consumo. O valor transita, mas há uma indiferença entre as formas do valor e o próprio valor – ou seja, o valor, na circulação simples, não subordina as formas em que ele aparece nem a passagem de uma forma à outra. Isso muda quando a própria fonte do valor assume uma forma-valor,

ou seja, quando a força de trabalho aparece como mercadoria no mercado<sup>4</sup>. No circuito completo proposto por Marx, em que a força de trabalho é uma das mercadorias que o dinheiro encontra no mercado, o valor subordina e determina todas as suas formas de existência. Dito de outra maneira, a valorização do valor passa a ser a finalidade que organiza o movimento das formas do valor. O valor deixa de ser uma substância cujo movimento não determina suas formas e se torna, nas palavras de Marx, uma substância em processo. O caráter histórico dessa formulação é que a produção capitalista se apresenta, assim, como uma forma de dominação mediada pelo mercado. E é nisso que se diferencia da dominação pessoal a que os servos estavam sujeitos no período feudal, por exemplo. É verdade que o servo, assim como o assalariado, trabalha para um outro, está subordinado a um poder que lhe é externo. Mas o servo não entrega sua produção ao seu senhor através do mercado ou sequer sua relação com a terra se dá através do mercado. Ele deve obediência direta a um senhor. No circuito do capital, cada passagem de uma forma do valor a outra está mediada por um preço determinado no mercado. Ou seja, o movimento de valorização do valor é mediado pela força reguladora do mercado – e não pela dominação pessoal.

Para identificarmos o conteúdo da crise em Marx, porém, é preciso ir além da subsunção formal do trabalho. Embora a constituição do capital se dê a partir do violento e persistente processo de separação do trabalhador dos meios de realizar trabalho (da terra, dos meios de produção, dos meios de subsistência e da condição de servo ou escravizado), o conteúdo da crise envolve a compreensão do modo pelo qual o capital faz da força social do

---

<sup>4</sup> Em *O negativo do capital*, Jorge Grespan explica como a subsunção formal do trabalho – ou seja, que a fonte do valor apareça como uma forma-valor no mercado – permite que Marx passe do circuito da circulação para o circuito do capital, ou, dito de outra forma, de um conceito de valor a um conceito de capital. “A *substância* do valor não se determina como *sujeito*, como totalidade autorreferente pelo lado do trabalho, mas pelo do capital que subordina formalmente o trabalho vivo. Daí que o capital assuma o caráter fetichista de *sujeito* a que se elevou a ‘substância’ do valor do qual se apropria. Daí também que o capital deva excluir o trabalho enquanto possibilidade de compor um todo pelo lado substancial da criação de valor. Ele inclui em si o trabalho como momento – capital variável – e o exclui como totalidade potencial, como possibilidade da própria ‘substância’ do valor tornar-se *sujeito* por si mesma. De outro modo, o capital não seria o *sujeito*; não denominaria as condições da sua autovalorização; não estabeleceria o fetiche pelo qual a *substância* impotente adquire, pela força dele, capacidade de se elevar a uma dimensão imensa.” (GRESPLAN, 2012, p. 107)

trabalho um momento de si. São as transformações da relação entre capital e trabalho no interior do processo produtivo o fundamento da crise – da qual até agora só conhecemos a forma externa de manifestação.

Na passagem da manufatura capitalista para a grande indústria moderna, Marx identifica o tipo de transformação do processo produtivo que está na origem da crise. Com a divisão do trabalho que fixa cada trabalhador parcial a uma tarefa simples da totalidade do processo de trabalho, o fundamento técnico da força social que se forma na manufatura é a virtuosidade do trabalhador. Por mais que já não se trate de um trabalhador como o artesão, que detém o controle da totalidade do processo de trabalho, persiste um princípio subjetivo de organização do trabalho. A fluidez das operações do trabalhador coletivo esbarra nos limites físicos e biológicos do trabalhador parcial. Mas a divisão do trabalho no interior da manufatura não se cristaliza apenas em trabalhadores que estão presos a uma fração ínfima da totalidade do processo de trabalho; ela se fixa também na perfeição das ferramentas com que esses trabalhadores operam. O trabalhador coletivo funciona de forma tão mais contínua quanto maiores forem a estreiteza e a deformação do trabalhador parcial e quanto mais especializadas forem suas ferramentas. É aí que entra em cena aquilo que Marx acreditava ser a obra mais perfeita da manufatura: as oficinas para a produção de ferramentas que se replicavam nas adjacências das manufaturas. São essas ferramentas especializadas do trabalhador parcial que reaparecem nos braços mecânicos das máquinas da grande indústria moderna.

Ainda que se possa identificar uma homologia entre o organismo maquínico a que o trabalhador parcial munido de sua ferramenta é reduzido e a máquina-ferramenta que o substitui na grande indústria moderna, há nessa passagem entre as duas formas de organização do trabalho uma diferença fundamental. Na produção mecanizada da grande indústria moderna já não é mais o homem o limite último do processo de trabalho. Em lugar do princípio subjetivo da divisão do trabalho, o processo é organizado a partir de um fundamento objetivo, a conexão entre as tarefas parciais pode

ser aperfeiçoada através da aplicação tecnológica da ciência. Dito de outra forma, a criação de riqueza passa a depender menos do tempo de trabalho empregado e mais do grau de desenvolvimento da ciência e da tecnologia postas em movimento durante o tempo de produção. Para Marx, este é o último estágio de desenvolvimento da forma do valor, pois o tempo de trabalho se torna efetivamente uma medida inadequada para a riqueza produzida. Nessa interpretação da passagem da manufatura para a grande indústria moderna, tomamos os conceitos de alienação e estranhamento como fenômenos próprios do processo de trabalho, ou seja, admitimos que a objetivação do trabalho e a perda e servidão ao objeto de trabalho significam, na manufatura, a separação do trabalhador do produto e do processo de trabalho e, na grande indústria moderna, a separação do homem da condição de trabalhador. (AUED, 2004, 2005a, 2005b)

A crítica de Marx à Economia Política revela, portanto, em primeiro lugar, que na autonomia relativa dos polos da forma do valor (e em todas as formas relativamente autônomas que se desenvolvem a partir dela) está posta a possibilidade formal da crise. Em segundo lugar, tomar o valor de troca como forma de manifestação do valor (como nos recomenda Marx na nota 32) significa que o capital subordina todas as formas do valor à sua valorização. E, mais especificamente, ao fazer da força subjetiva do trabalho um momento de si, o capital faz do tempo de trabalho a única medida da riqueza; o capital se torna capaz de se automensurar como sujeito. Em terceiro lugar, ao elevar a produtividade do trabalho, o capital faz com que o trabalhador, que é a única fonte de mais-valia, deixe de ocupar a centralidade do processo produtivo. O resultado é que o capital mede a si mesmo através do tempo de trabalho e essa medida se torna cada vez mais inadequada para medi-lo.

É essa contradição do capital que aparece na conhecida lei da queda tendencial da taxa de lucro. Como explica Grespan, trata-se, antes de mais nada, de uma lei em razão “da própria contradição em que são postos seus termos” (GRESPLAN, 2012, p. 190), ou seja, as causas da tendência de queda

da taxa de lucro são “aspectos contraditórios de um fundamento comum”. (*id.*, *ibid.*) A autonegação do capital aparece, no entanto, apenas como tendência. Marx entende como tendência aquilo cuja execução absoluta é detida ou atenuada por condições determinadas pela mesma relação fundamental que determina a lei. É uma lei sempre retardada, atenuada ou anulada. Dentre os fatores contrários à queda na taxa de lucro enumerados por Marx estão o aumento do grau de exploração do trabalho através do prolongamento da jornada de trabalho e da intensificação do trabalho, a baixa de preço dos elementos do capital constante e a formação de uma população de trabalhadores supérfluos. Nesse sentido, pode-se dizer que a necessidade da lei da queda tendencial da taxa de lucro “não implica sua ‘execução absoluta’, ou seja, que seus efeitos sempre estejam manifestos, que a taxa de lucro esteja sempre baixando na realidade”. (GRESPLAN, 2012, p. 192) A queda da taxa de lucro deve ser classificada como uma necessidade relativa, explica Grespan, pois

admite sempre a possibilidade de seu oposto e [...] depende de condições externas para se realizar, subordinando a si as condições favoráveis ou desfavoráveis como *contingências*. Daí seu caráter de tendência – necessária mas não absoluta, predominando e se afirmando sobre as contingências sem, contudo, anulá-las. (*id.*, p. 197)

A crise se apresenta como uma interrupção violenta – conforme a definição formal de crise que apresentamos nesta seção – quando a queda da taxa de lucro indica que a produção é efetivamente excessiva em relação ao processo de valorização. Nos termos de Marx, há superprodução quando o capital aumentado  $C + xC$  não produz mais lucro do que o capital  $C$  antes de seu aumento  $xC$ . Ou seja, na crise, produção e valorização aparecem em oposição e não mais como termos afins; um capital adicional adiantado não corresponde a um processo de valorização. A destruição violenta de parte do capital existente ou a inoperância forçada desse capital se torna a condição para que a acumulação retorne a um ponto em que um capital adicional possa ser empregado com lucro. Tal destruição pode se dar tanto em termos



materiais, de modo que parte dos meios de produção, sejam eles capital fixo ou circulante, deixe de operar como capital, ou em termos de valores, o que significa uma depreciação do valor-capital que assume a forma de direitos de participação na mais-valia.

O que nos interessa ressaltar, no entanto, é que a interrupção da circulação das mercadorias ou a desproporção entre os setores de produção de meios de produção e de produção de meios de consumo aparecem sempre como uma possibilidade porque, para Marx, há compatibilidade entre o crescimento absoluto da massa de mais-valia e a queda na taxa de lucro, desde que o capital total cresça num ritmo superior à queda na taxa de lucro. Esse crescimento acelerado do capital total, ou a diminuição acelerada de seu tempo de rotação, é a condição para que a redução relativa de capital variável e o aumento absoluto da mais-valia possam existir simultaneamente. Significa dizer que a reprodução do capital, a um só tempo, faz do tempo de trabalho uma medida medíocre para medir a produção baseada em forças produtivas sociais e consolida o roubo de tempo de trabalho alheio como fonte da riqueza.

Podemos expressar matematicamente o efeito da redução relativa do capital variável na queda da taxa de lucro através da fórmula proposta por Marx:  $l' = \frac{m'}{(\frac{c}{v})+1}$ , em que  $l'$  é taxa de lucro,  $m'$  é taxa de mais-valia,  $c$  é capital constante,  $v$  é capital variável e  $\frac{c}{v}$  indica a composição orgânica do capital. A redução relativa do capital variável analisada por Marx pode ser lida, em termos matemáticos, como uma tendência de que  $v$  se reduza a zero no limite. Assim como a redução relativa do capital variável aponta para o problema da transição entre modos de produção, a tradução matemática da contradição do capital, a saber,  $\lim_{v \rightarrow 0} \left( \frac{m'}{(\frac{c}{v})+1} \right)$ , é igualmente uma pergunta sobre a transição entre um caso-limite e os termos que ele limita.

### 3. Da incomensurabilidade aos infinitesimais

#### 3.1 De Pitágoras a Arquimedes

Carl Boyer argumenta, em *The history of the calculus and its conceptual development*, que a origem do cálculo diferencial pode ser traçada a partir do problema da incomensurabilidade na matemática pitagórica. Partindo da ideia de unidade entre natureza e geometria, Pitágoras e seus seguidores desenvolvem um método de comparação das áreas das figuras. O procedimento consiste em definir a área a partir da superposição de uma superfície em outra, de modo que “se diz que uma unidade de área está contida em uma segunda área um dado número de vezes”. A matemática pitagórica não se ocupava propriamente, portanto, em estabelecer a área de uma figura, mas a razão entre duas superfícies. As dificuldades associadas a essa operação de congruência surgiriam com a aplicação do método à comparação entre segmentos de reta. A “descoberta desconcertante” dos pitagóricos é a de que entre o lado de um quadrado e sua diagonal não há nenhuma medida comum em que um possa se expressar em termos do outro. Os dois segmentos de reta são incomensuráveis entre si.

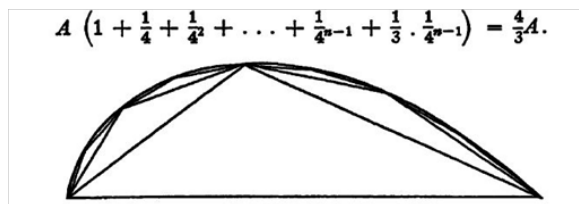
A saída ao problema dos incomensuráveis no cálculo das áreas aparece no método de exaustão de Eudoxo. Boyer argumenta que o método de exaustão corresponde ao esforço intuitivo de preencher o espaço entre um polígono e um círculo, entre a reta e a curva, de modo que a imagem que evoca não é da coincidência entre as figuras, mas de sua permanente aproximação. O polígono inscrito pode se aproximar do círculo o quanto se queira, mas ele nunca se transforma no círculo. Arquimedes acrescenta duas modificações ao método de exaustão de Eudoxo: 1) passa a considerar o resto da operação no cálculo da área e 2) utiliza uma figura circunscrita, além da figura inscrita que caracteriza o procedimento, para desenvolver sua demonstração por *reductio ad absurdum*. Boyer analisa a primeira modificação através da

---

<sup>5</sup> “[...] a unit of area is said to be contained in a second area a given number of times”. (BOYER, 2016, p. 18)

aplicação do método de exaustão a um segmento parabólico que recebe um triângulo inscrito cuja base é idêntica à do segmento. O procedimento segue com a inscrição de novos triângulos no interior dos dois segmentos menores, tomando os lados do triângulo como bases. O resultado é uma série de polígonos com um número cada vez maior de lados, como representado na Figura 1.

**Figura 1 – O resto no método de exaustão de Arquimedes**



Fonte: BOYER, 2016, p. 52

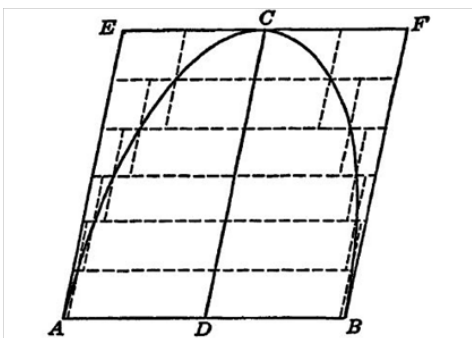
À área do  $n$ ésimo polígono, dada pela série  $\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\right)A$ , Arquimedes acrescenta o resto da operação, dado por  $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)A$ , obtendo a área do segmento parabólico,  $A\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4^{n-1}}\right) = \frac{4}{3}A$ . Boyer compara o resultado a que chega Arquimedes com a moderna concepção de limite estabelecida por Karl Weierstrass em meados do século XIX, em que uma definição de número livre das intuições espaciais tornaria supérflua a questão sobre se uma variável atinge o limite. Com a teoria dos números de Weierstrass, o conceito de limite deixaria de envolver uma noção de aproximação para se apresentar como um problema essencialmente estático:

À medida que o número de termos se torna maior, a série “exaure”  $\frac{4}{3}A$  apenas no sentido grego de que o resto,  $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)A$ , pode ser feito tão pequeno quanto se queira. Esse é exatamente o método de prova para a existência de um limite, mas Arquimedes não interpretava assim o argumento. Ele não expressava a ideia de que não há resto no limite ou de que a série infinita é rigorosamente igual a  $\frac{4}{3}A$ . Em vez disso, ele provou, pela dupla demonstração por *reductio ad absurdum* do método de exaustão, que a área do segmento parabólico não poderia ser nem maior nem menor

que  $\frac{4}{3}A$ . Para poder definir  $\frac{4}{3}A$  como a soma da série infinita, teria sido necessário desenvolver o conceito geral de número real. *Os matemáticos gregos não possuíam tal conceito, de modo que para eles sempre havia uma lacuna entre o real (finito) e o ideal (infinito)* [grifo nosso]<sup>6</sup>. (BOYER, 2016, 52)

A segunda modificação introduzida por Arquimedes no método de Eudoxo é a figura circunscrita, que Boyer exemplifica a partir do segmento parabolóide ABC circunscrito pelo cilindro ABEF. Ambas as figuras compartilham o mesmo eixo CD, como indicado na Figura 2, que é dividido em  $n$  partes de altura  $h$  pelas quais passam planos paralelos à base. Nas seções do segmento parabolóide assim formadas, Arquimedes constrói troncos de cilindros inscritos e circunscritos. Com essa operação, obtém as seguintes relações de proporção:  $\frac{\text{Cilindro ABEF}}{\text{Figura inscrita}} = \frac{n^2 h}{h+2h+\dots+(n-1)h}$  e  $\frac{\text{Cilindro ABEF}}{\text{Figura circunscrita}} = \frac{n^2 h}{h+2h+\dots+nh}$ :

**Figura 2 – A figura circunscrita no método de exaustão de Arquimedes**



Fonte: BOYER, 2016, p. 54

<sup>6</sup> “As the number of terms becomes greater, the series thus “exhausts”  $\frac{4}{3}A$  only in the Greek sense that the remainder,  $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)A$ , can be made as small as desired. This is, of course, exactly the method of proof for the existence of a limit, but Archimedes did not so interpret the argument. He did not express the idea that there is no remainder in the limit, or that the infinite series is rigorously equal to  $\frac{4}{3}A$ . Instead, he proved, by the double reductio ad absurdum of the method of exhaustion, that the area of the parabolic segment could be neither greater nor less than  $\frac{4}{3}A$ . In order to be able to define  $\frac{4}{3}A$  as the sum of the infinite series, it would have been necessary to develop the general concept of real number. *Greek mathematicians did not possess this, so that for them there was always a gap between the real (finite) and the ideal (infinite)* [grifo nosso].”

Arquimedes havia identificado em seus trabalhos sobre as espirais que:  $h + 2h + \dots + (n - 1)h < \frac{1}{2}n^2h$  e  $h + 2h + \dots + nh > \frac{1}{2}n^2h$ . Se a matemática moderna de Weierstrass definiria o limite da série infinita das figuras inscrita e circunscrita como sendo igual a 2 (isto é, o limite sendo idêntico à própria sequência), Arquimedes, por sua vez, reescreve as proporções em termos de desigualdades:  $\frac{\text{Cilindro ABEF}}{\text{Figura inscrita}} > \frac{2}{1}$  e  $\frac{\text{Cilindro ABEF}}{\text{Figura circunscrita}} < \frac{2}{1}$ . Pelo método de exaustão e pela demonstração por *reductio ad absurdum*, Arquimedes conclui que o segmento parabolóide não pode ser nem maior nem menor que metade do cilindro ABEF.

A partir de Arquimedes, a história do cálculo diferencial se confunde com uma história dos aperfeiçoamentos do método de exaustão. Os infinitesimais de Leibniz estão incluídos entre os esforços para simplificar o método de Arquimedes.

### 3.2 Os infinitesimais de Leibniz

Em 1672, em seu primeiro encontro com Christiaan Huygens em Paris, Leibniz conta àquele que viria a ser seu mentor nos estudos em matemática que havia descoberto um método para a soma de séries infinitas. Huygens, que já havia ouvido elogios a Leibniz do secretário da Royal Society, Henry Oldenburg, resolve, então, testá-lo, lhe propondo um problema: estabelecer a demonstração de que a soma do inverso dos números triangulares (que correspondem à terceira linha do triângulo aritmético de Pascal) é igual a 2. Leibniz encontra não apenas a solução para essa questão específica como calcula todas as somas associadas ao inverso recíproco do triângulo de Pascal, que mais tarde receberia o nome de triângulo harmônico. Segundo a regra geral estabelecida por Leibniz, a soma de todos os números em uma coluna do triângulo harmônico é igual à razão entre os expoentes das duas colunas precedentes, tal como apresentado na Figura 3 a seguir. À terceira coluna corresponde o expoente 3, o que significa que sua soma é igual a  $\frac{2}{1}$ .

**Figura 3 – Soma dos números figurados recíprocos**

Series Fractionum Progressionis Arithmeticae Replicatae							
	semel	bis	ter	quater	quinquies	sexies	septies
Exponentes	1	2	3	4	5	6	7
	Unitatum	Naturalium	Triangularium	Pyramidalium	Triangulo- Triangularium	Triangulo- pyramidalium	Pyramido- pyramidalium
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{84}$
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{1}{210}$
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{462}$
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{1}{462}$	$\frac{1}{924}$
Summae	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$ etc.

Fonte: LEIBNIZ apud RABOUIN, 2015b, p. 59

O problema da soma de séries infinitas, que é a questão central do desafio proposto por Huygens, reaparece na solução apresentada por Leibniz para o cálculo da quadratura do círculo. Em 1673, Huygens apresenta a Leibniz o livro em que o matemático escocês James Gregory procurava provar que a área do círculo não podia ser determinada a partir de um cálculo analítico ou algébrico, isto é, que envolvesse operações finitas. Diante da disputa entre Gregory e Huygens, que, por sua vez, julgava ser possível encontrar uma expressão exata em número racionais para a quadratura do círculo, a solução de Leibniz consiste em mostrar como uma série infinita poderia atingir o resultado exato procurado por Huygens. No *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae*, trabalho escrito entre 1675 e 1676, mas que jamais chegou a ser publicado durante sua vida, Leibniz escreve, na proposição que encerra o tratado, que não há expressão “melhor ou mais geométrica” (isto é, exata) da quadratura do círculo

do que a série infinita que converge no valor de  $\frac{\pi}{4}$  (dada pela sequência  $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19}$  etc). Leibniz retoma o problema em sua primeira publicação na revista *Acta Eruditorum*, em fevereiro de 1682, no artigo *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa*.

No início do artigo, Leibniz se dedica a reconstituir o histórico do problema. “Desde sempre os geômetras tentaram estabelecer as proporções entre curvas e retas, mas mesmo agora, com o auxílio da Álgebra, ainda não dominamos bem essa questão, pelo menos através da aplicação dos métodos em uso hoje.”<sup>7</sup> (LEIBNIZ, 1995, p. 71) Ao traçar polígonos inscritos e circunscritos, Arquimedes indicara os limites entre os quais o círculo deve estar, ou seja, estabelecera meios para fazer aproximações. Mas, ainda que sejam úteis na geometria prática, diz Leibniz, as aproximações não são satisfatórias “se não se pode saber como prolongar tais números ao infinito”<sup>8</sup>. (*id.*, p. 74) Já o cálculo da quadratura proposto por Leibniz consiste em expressar o valor exato da área do círculo através de uma série infinita, de modo que a série inteira envolva, através de sua lei, todas as aproximações ao infinito.

O aperfeiçoamento proposto por Leibniz para o método de exaustão consiste em qualificar de maneira distinta o resto da operação de Arquimedes. As áreas são iguais não porque sua diferença é absolutamente nula, mas por ser incomparavelmente pequena. A diferença não é uma quantidade comparável àquelas das quais é a diferença. Para mostrar que a diferença entre as áreas é redutível a uma quantidade não assinalável sem recorrer à prova por dupla redução ao absurdo (em que é necessário demonstrar, a um só tempo, que uma quantidade não é nem maior nem menor que outra quantidade dada), Leibniz se vale dos infinitesimais. As “quantidades

---

<sup>7</sup> “Depuis toujours, les Géomètres se sont employés à établir des proportions entre lignes courbes et lignes droites, pourtant même à présent que nous disposons de l'aide de l'Algèbre, nous ne maîtrisons pas encore bien cette question, du moins en appliquant les méthodes en usage aujourd'hui.”

<sup>8</sup> “[...] si on ne trouve pas comment prolonger de tels nombres à l'infini.”

fictícias”, como os denomina no escólio da proposição VII do *De quadratura arithmetica*<sup>9</sup> (LEIBNIZ, 2004, p. 69-71), não são introduzidas como objetos fixos, mas como “uma propriedade relacional associada à arbitrariedade do ‘tamanho’ da ‘diferença’”<sup>10</sup>, explica Rabouin em *Leibniz’s rigorous foundations of the method of indivisibles*. (RABOUIN, 2015a, p. 361) “Os infinitesimais são apenas uma forma de abreviar sentenças em que há uma diferença que pode ser tornada menor que qualquer quantidade dada”<sup>11</sup> (*id.*, *ibid.*) e não um novo tipo de quantidade<sup>12</sup>. (*id.*, p. 361-362)

Os infinitesimais também seriam interpretados como entidades fictícias no cálculo das tangentes, concebido por Leibniz como o exato inverso do

---

<sup>9</sup> “A singularidade da Demonstração é resolver a questão não pelo intermédio de figuras inscritas e circunscritas, mas apenas através de figuras inscritas. Confesso jamais ter ouvido falar, até aqui, de um método capaz de demonstrar perfeitamente o que seria uma quadratura sem dedução *ad absurdum*; suspeito que não se possa obtê-la de uma maneira natural e sem envolver *quantidades fictícias* [grifo nosso], isto é, infinitas ou infinitamente pequenas; no entanto, entre todas as deduções *ad absurdum*, creio que a maneira mais simples, natural e próxima da demonstração direta consiste em mostrar diretamente (caso contrário, somos conduzidos, como de costume, a um raciocínio duplo que prova que uma quantidade não é nem maior nem menor que a outra) que não há nenhuma diferença entre duas quantidades e que, portanto, essas quantidades são iguais, e, sobretudo, em usar apenas um termo intermediário, seja uma figura inscrita ou circunscrita, mas não as duas ao mesmo tempo. Esta é a maneira de fornecer uma compreensão mais clara do problema” (“La singularité de la Démonstration est de résoudre la question non par le truchement de figures inscrites et circonscrites mais des seules figures inscrites. Or j’avoue n’avoir jusqu’ici jamais entendu parler d’une méthode capable de démontrer parfaitement ne serait-ce qu’une seule quadrature sans déduction *ad absurdum*; j’ai même des raisons de craindre qu’on ne puisse pas le faire d’une manière naturelle et sans faire intervenir des *quantités fictives* [grifo nosso], je veux dire infinies ou infiniment petites ; cependant, parmi toutes les déductions *ad absurdum*, je crois que la manière de procéder la plus simple, la plus naturelle et la plus proche de la démonstration directe consiste à montrer directement (faute de quoi on est conduit d’ordinaire à un double raisonnement en prouvant que l’une n’est, d’une part pas plus grande, d’autre part pas plus petite que l’autre) qu’il n’y a aucune différence entre deux quantités et que par conséquent ces quantités sont égales, et surtout à n’employer qu’un seul terme intermédiaire, qu’il s’agisse d’une figure inscrite ou circonscrite, mais non les deux en même temps. C’est le moyen de donner une compréhension plus claire du problème”).

<sup>10</sup> “[...] a *relational property* linked to the *arbitrariness* of the ‘size’ of the ‘difference’”.

<sup>11</sup> “Infinitesimals are just a way of abbreviating sentences in which occurs a difference which can be made smaller than any given quantity”.

<sup>12</sup> Rabouin enfatiza que os infinitesimais não são quantidades novas, não-arquimedianas. “Se para duas magnitudes finitas  $x$  e  $y$  existe  $h$ , tal que para qualquer magnitude  $\varepsilon$ ,  $(y + h) - x < \varepsilon$ , então  $h$  poderia ser visto como um ‘infinitesimal’ (e mais precisamente como uma ‘diferença infinitesimal’ entre  $y$  and  $x$ ). Como  $h$  depende de  $x$ ,  $y$  e  $\varepsilon$ , não é uma entidade fixa – e, *a fortiori*, não é um novo tipo de quantidade” (“If, for two given finite magnitudes  $x$  and  $y$ , there exists  $h$ , such that for any given magnitude  $\varepsilon$ ,  $(y + h) - x < \varepsilon$ , then  $h$  could be seen as an ‘infinitesimal’ (and more precisely an ‘infinitesimal difference’ between  $y$  and  $x$ ). Since  $h$  depends on  $x$ ,  $y$  and  $\varepsilon$ , it is not a fixed entity – and *a fortiori* not a new type of quantity”).



cálculo das áreas. Em um manuscrito de 1701, chamado *Cum prodiisset*, Leibniz revisa as regras do cálculo diferencial, tal como apresentadas no artigo *Nova Methodus pro Maximis et Minimis*, publicado na *Acta Eruditorum* em 1684, e estabelece uma justificação para o uso dos infinitesimais baseada na lei do contínuo. Por descreverem problemas que envolvem uma transformação contínua entre um caso-limite e os termos que ele limita, os infinitesimais assumem um duplo caráter no cálculo diferencial, como explica Bos em *Differentials, high-order differentials and derivative in the Leibnizian calculus*: podem ser desconsiderados no limite, mas a relação que descrevem permanece válida. Vejamos como Bos apresenta essa propriedade ambígua dos elementos operacionais do cálculo leibniziano – esvaziam-se como elementos, mas se mantêm como relação.

Dado que  $dx$  e  $dy$  indicam diferenças finitas correspondentes [conforme a Figura 4] e que  $\underline{dx}$  é um segmento de reta finito e fixo. Para  $x$  e  $y$  fixos,  $\underline{dy}$  é definido pela proporcionalidade

$$\underline{dy}:\underline{dx} = dy:dx. (1)$$

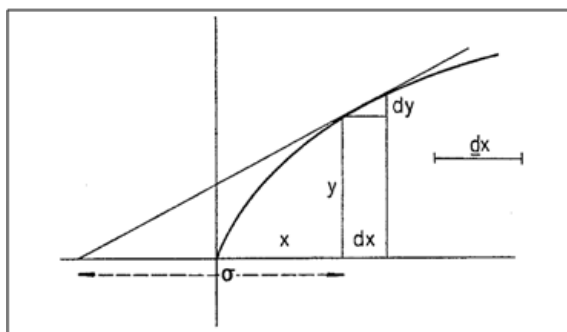
$\underline{dy}$  é finito, dependente de  $dx$  e definido por (1) para  $dx \neq 0$ . Leibniz defendia que  $\underline{dy}$  também pode receber uma interpretação no caso  $dx = 0$ , dada por

$$\underline{dy}:\underline{dx} = y:\sigma,$$

em que  $\sigma$  é a subtangente; ou seja, ele tomava a tangente como a posição limite da secante. É importante ressaltar que ele não invoca aqui a lei do contínuo; como se verá, ele a emprega mais tarde, *pressupondo* que a posição limite da secante é a tangente. Se  $dx \neq 0$ , a razão  $\underline{dy}:\underline{dx}$  pode ser substituída por  $dy:dx$  na fórmula que expressa a relação entre as diferenças finitas  $dx$  e  $dy$ . Uma vez feita essa suposição, o argumento implícito nas fórmulas pode ser estendido, como, de fato, a lei do contínuo sugere, ao caso limite  $dx=0$ , pois nesse caso  $\underline{dy}:\underline{dx}$  ainda possui uma interpretação e um significado como uma razão entre quantidades finitas. Mas então podemos substituir  $dy:dx$  por  $\underline{dy}:\underline{dx}$  tanto no caso em que  $dx \neq 0$  como no caso em que  $dx = 0$ , interpretando, no último caso,  $dx$  e  $dy$  como “ficções”. Para provar as regras do cálculo, é preciso mostrar que essas regras de manipulação dos fictícios

$dy$  e  $dx$  no caso  $dx = 0$  podem, de fato, ser interpretadas como correspondentes às manipulações corretas com os finitos  $\underline{dx}$  e  $\underline{dy}$ <sup>13</sup>. (BOS, 1974, p. 57-58)

**Figura 4 – Prova das regras do cálculo diferencial baseada na lei do contínuo**



Fonte: BOYER, 2016, p. 54

Para mostrar que a tangente se comporta como limite da secante, é preciso provar que a relação entre diferenças se mantém quando as próprias diferenças são reduzidas a zero. A separação entre as grandezas infinitesimais e a operação de que elas participam é uma propriedade fundamental da solução que Leibniz encontra para os problemas que envolvem o infinito, de modo que o matemático francês Jean D’Alembert é levado a comparar o cálculo leibniziano ao automatismo de uma atividade manual a respeito

<sup>13</sup> “Let  $dx$  and  $dy$  denote *finite* corresponding differences [conforme a Figura 4], and  $\underline{dx}$  be a fixed finite line segment. For fixed  $x$  and  $y$ , define  $\underline{dy}$  by the proportionality

$$\underline{dy} : \underline{dx} = dy : dx. (1)$$

$\underline{dy}$  is finite, dependent on  $\underline{dx}$  and defined by (1) for  $dx \neq 0$ . Leibniz argued that  $\underline{dy}$  can also be given an interpretation in the case  $dx = 0$ , namely as defined by

$$\underline{dy} : \underline{dx} = y : \sigma,$$

in which  $\sigma$  is the subtangent; that is, he took the tangent as the limiting position of the secant. It is important to stress that for this he did not invoke the law of continuity; as will be seen, he used the law later, *presupposing* that the limiting position of the secant is the tangent. Now if  $dx \neq 0$ , the ratio  $\underline{dy} : \underline{dx}$  can be substituted for  $dy : dx$  in the formula expressing the relation between the finite differences  $dx$  and  $dy$ . Once this supposition is made, the argument implicit in the formulas can be extended, as indeed the law of continuity asserts, to the limiting case  $dx = 0$ , because in that case  $\underline{dy} : \underline{dx}$  is still interpretable and meaningful as a ratio of finite quantities. But then one may resubstitute  $\underline{dy} : \underline{dx}$  for  $dy : dx$  both in the cases  $dx \neq 0$  and  $dx = 0$ , interpreting, in the latter case, the  $\underline{dx}$  and  $\underline{dy}$  as ‘fictions’. To prove the rules of the calculus, it has now to be shown that these rules of manipulating the fictitious  $\underline{dy}$  and  $\underline{dx}$  in the case  $dx = 0$ , are indeed interpretable as corresponding to correct manipulations with the finite  $\underline{dx}$  and  $\underline{dy}$ ’.

da qual o trabalhador nada sabe sobre “o espírito que coloca seus dedos em movimento”<sup>14</sup>. (D’ALEMBERT *apud* LEIBNIZ, 1995, p. 320) A autonomia das operações que envolvem infinitesimais é semelhante, para Leibniz, à autonomia de uma relação de proporção quando comparada aos objetos a partir dos quais se forma. Isso significa que “é possível obter um conhecimento exato das relações”, diz Parmentier, “ainda que os objetos permaneçam desconhecidos ou mesmo indeterminados: é possível saber que há duas vezes mais olhos que narizes em uma cidade sem conhecer o número de habitantes”<sup>15</sup>. (PARMENTIER, 1995, p. 37) A realidade da relação é distinta da dos objetos que ela envolve e estes, por sua vez, só precisam ser homogêneos entre si para constituir a relação<sup>16</sup>. (LEIBNIZ, 1989, p. 667)

#### 4. Crítica e transição

Se assumimos que o conteúdo da crise do capital pode ser traduzido, em termos matemáticos, na expressão  $\lim_{v \rightarrow 0} \left( \frac{m'}{\left(\frac{c}{v}\right)+1} \right)$  e que só pode haver

---

<sup>14</sup> “Do mesmo modo, nas artes mecânicas, o espírito e o gênio dos inventores se encontram, se se pode falar dessa forma, reduzidos e concentrados em um pequeno número de operações manuais tanto mais admiráveis quanto sua simplicidade as coloca ao alcance de serem executadas pelas mãos mais grosseiras de homens que sequer suspeitam algo sobre o espírito que põe seus dedos em movimento, mais ou menos como um corpo que é guiado por uma alma que ele não conhece” (“De même dans les arts mécaniques, l’esprit et le génie des inventeurs se trouve, si on peut parler de la sorte, réduit et concentré dans un petit nombre d’opérations manuelles, d’autant plus admirables que leur simplicité les met à la portée d’être exécutées par les mains les plus grossières par des hommes bien éloignés de se douter de l’esprit qui met leurs doigts en mouvement, à peu près comme le corps est guidé par une ame qu’il ne connaît point”).

<sup>15</sup> “[...] on peut parvenir à une connaissance exacte des rapports, alors même que les objets demeureraient inconnus, voire indéterminés : on peut savoir qu’il y a deux fois plus d’yeux que de nez dans une ville sans connaître le nombre d’habitants”.

<sup>16</sup> Leibniz explica seu conceito de homogeneidade no texto *The metaphysical foundations of mathematics*: “Duas entidades são *homogêneas* quando duas outras entidades podem ser designadas de modo que sejam iguais às primeiras e semelhantes entre si. Dados A e B; se L é tomado como igual a A, e M como igual a B, e L e M são semelhantes, dizemos que A e B são homogêneas. Assim, costume dizer que entidades homogêneas são aquelas que podem ser tornadas semelhantes umas às outras por meio de transformações, como curvas e retas. Isto é, se A é transformado em seu igual L, A pode ser tornado semelhante a B, ou a seu igual M no qual B se transforma” (“Two entities are homogeneous to which two other entities can be assigned which are equal to them and similar to each other. Given A and B; if L is taken equal to A, and M equal to B, and L and M are similar, we call A and B homogeneous. Hence I usually say also that homogeneous entities are those which can be made similar to each other by means of transformations, like curves and straight lines. That is, if A is transformed into its equal L, it can be made similar to B, or to its equal M into which B is assumed to have been transformed”).

aumento absoluto da massa de mais-valia diante da redução relativa do capital variável se o capital total adiantado cresce num ritmo superior ao da queda da taxa de lucro, poderíamos dizer que, assim como na passagem da reta secante para a reta tangente descrita por Bos, um dos termos da relação, o capital variável, pode tender a zero, mas a própria relação capitalista se mantém. Dito de outra forma, o tempo de trabalho se torna prescindível como medida da produção social, mas o roubo de tempo de trabalho alheio segue como fundamento da riqueza, desde que estejam em marcha fatores que impeçam a queda na taxa de lucro. Como vimos, os infinitesimais são, para Leibniz, os operadores da transição entre um caso-limite e os termos que ele limita. A redução relativa do capital variável também parece ocupar uma posição de operador da transição nos escritos de Marx, visto que o leva a conceber o tempo livre não apenas como a liberação do trabalho que a propriedade privada permite, mas como forma de mensuração e de regulação da produção social não mais baseada na propriedade privada:

*A criação de muito tempo disponível para além do tempo necessário de trabalho, para a sociedade como um todo e para cada membro dela (i.e., espaço para o desenvolvimento das forças produtivas plenas do indivíduo singular, logo também da sociedade), essa criação de não tempo de trabalho aparece, da perspectiva do capital, assim como de todos os estágios anteriores, como não tempo de trabalho, tempo livre para alguns indivíduos. O capital dá o seu aporte aumentando o tempo de trabalho excedente da massa por todos os meios da arte e da ciência, porque a sua riqueza consiste diretamente na apropriação de tempo de trabalho excedente; uma vez que sua finalidade é diretamente o valor, não o valor de uso. Desse modo, e a despeito dele mesmo, ele é instrumento na criação dos meios para o tempo social disponível, na redução do tempo de trabalho de toda a sociedade a um mínimo decrescente e, com isso, na transformação do tempo de todos em tempo livre para seu próprio desenvolvimento. Todavia, sua tendência é sempre, por um lado, de criar tempo disponível, por outro lado, de convertê-lo em trabalho excedente. Quando tem muito êxito, o capital sofre de superprodução e, então, o trabalho necessário é interrompido porque não há trabalho excedente para ser valorizado pelo capital. Quanto*

mais se desenvolve essa contradição, tanto mais se evidencia que o crescimento das forças produtivas não pode ser confinado à apropriação do trabalho excedente alheio, mas que a própria massa de trabalhadores tem de se apropriar do seu trabalho excedente. Tendo-o feito – e com isso *o tempo disponível* deixa de ter uma existência *contraditória* –, então, por um lado, o tempo necessário de trabalho terá sua medida nas necessidades do indivíduo social, por outro, o desenvolvimento da força produtiva social crescerá com tanta rapidez que, embora a produção seja agora calculada com base na riqueza de todos, cresce o *tempo disponível* de todos. Pois a verdadeira riqueza é a força produtiva desenvolvida de todos os indivíduos. Nesse caso, o tempo de trabalho não é mais de forma alguma a medida da riqueza, mas o tempo disponível. (MARX, 2011, p. 590-591)

Há uma analogia entre a queda tendencial da taxa de lucro e os fundamentos do cálculo diferencial, embora aquela se refira às características históricas de um modo de produção e este se restrinja a uma estrutura formal (haveria uma homologia entre os dois se se pudesse demonstrar que a estrutura do cálculo incorpora aspectos da produção material). Em ambos os casos a tendência de redução a zero de um dos componentes da relação – capital variável, no caso da relação capitalista, e das diferenças que podem ser tornadas menores do que qualquer quantidade dada, no caso do cálculo diferencial – aponta a existência incontornável de um caso-limite. É certamente o caso-limite do capital que nos interessa aqui. Por um lado, a crise existe como possibilidade formal porque a redução relativa do capital variável enquanto operador da transição é neutralizada por fatores contrários à queda na taxa de lucro. Parecemos imersos na série infinita e cada vez mais distantes do caso-limite. De outro, é inegável que a redução relativa do capital variável indica o fundamento de um modo de produção distinto, assim como, de maneira análoga, os infinitesimais ajudam a operacionalizar a passagem da secante à tangente. Do tempo de trabalho ao tempo livre, da divisão do trabalho como única forma de obter os meios de vida à reapropriação não-alienada da

produção social<sup>17</sup>, da desproporção entre os setores à planificação<sup>18</sup>: a redução relativa do capital variável indica que a produção capitalista está para a produção social como um subconjunto, ou que a produção social extrapola a relação capitalista de produção. Se admitimos que a natureza do capital se explicita inteiramente no limite, isto é, através de sua reprodução contraditória com elevação da composição orgânica, sua apreensão é inseparável de uma noção de transição. É nesse sentido que, dada a inversão entre as teorias marxista e keynesiana a respeito do conceito de crise, a crítica, longe de se restringir ao campo da moral, é o próprio ato de construção de um novo modo de produção.

---

<sup>17</sup> “Logo que o trabalho começa a ser distribuído, cada um passa a ter um campo de atividade exclusivo e determinado, que lhe é imposto e ao qual não pode escapar; o indivíduo é caçador, pescador, pastor ou crítico crítico, e assim deve permanecer se não quiser perder seu meio de vida – ao passo que, na sociedade comunista, onde cada um não tem um campo de atividade exclusivo, mas pode aperfeiçoar-se em todos os ramos que lhe agradam, a sociedade regula a produção geral e me confere, assim, a possibilidade de hoje fazer isto, amanhã aquilo, de caçar pela manhã, pescar à tarde, à noite dedicar-me à criação de gado, criticar após o jantar, exatamente de acordo com a minha vontade, sem que eu jamais me torne caçador, pescador, pastor ou crítico. Esse fixar-se da atividade social, essa consolidação de nosso próprio produto num poder objetivo situado acima de nós, que foge ao nosso controle, que contraria nossas expectativas e aniquila nossas conjeturas, é um dos principais momentos no desenvolvimento histórico até aqui realizado.” (MARX, 2007, p. 37-38)

<sup>18</sup> “Imaginemos que a sociedade, em vez de capitalista, fosse comunista: antes de mais nada, desaparece o capital-dinheiro e, por conseguinte, os véus com que ele disfarça as operações. E tudo fica reduzido ao seguinte: a sociedade tem de calcular previamente a quantidade de trabalho, meios de produção e meios de subsistência que, sem prejuízo, pode aplicar em empreendimentos que, como construção de ferrovias etc., por longo tempo, um ano ou mais, não fornecem meios de produção, meios de subsistência nem qualquer efeito útil, mas retiram da produção global do ano trabalho, meios de produção e de subsistência. Mas, na sociedade capitalista, onde o senso social só se impõe depois do fato consumado, podem ocorrer e ocorrem necessária e constantemente grandes perturbações. Há a pressão sobre o mercado financeiro e, em sentido contrário, as facilidades desse mercado que fazem aparecer em massa os empreendimentos mencionados, as circunstâncias, portanto, que mais tarde pressionam o mercado financeiro. Gera-se a pressão porque é necessário, continuamente e durante longo prazo, adiantamento de capital-dinheiro em grande escala. [...] Além disso, há pressão sobre o capital produtivo disponível da sociedade. Retirando-se constantemente do mercado elementos do capital produtivo e lançando-se em troca no mercado apenas um equivalente em dinheiro, aumenta a procura solvente, que, por sua vez, não cresce a oferta de qualquer elemento. Daí elevarem-se os preços tanto dos meios de subsistência quanto das matérias de produção.” (MARX, 2008a, p. 357-358)

## Referências

- AUED, I. M. *Alienação, divisão do trabalho e manufatura em Karl Marx: ou de como libertar o trabalhador do trabalho*. 2004. 79 p. Tese – Programa de Pós-Graduação em Sociologia da Unesp, Araraquara, 2004.
- AUED, I. M. *Alienação, maquinaria e grande indústria moderna em Karl Marx: ou de como o homem se liberta do trabalhador*. 2005a. 59 p. Tese – Programa de Pós-Graduação em Sociologia da Unesp, Araraquara, 2005a.
- AUED, I. M. *Transcendência (Aufhebung), alienação, manufatura e maquinaria em Karl Marx: ou de como o homem supera sua desumanização e faz-se homem plenamente desenvolvido*. 2005b. 55 p. Tese – Programa de Pós-Graduação em Sociologia da Unesp, Araraquara, 2005b.
- AZEVEDO, R. *A pirâmide dos infinitos mundos possíveis de Leibniz*. 2019. 165p. Tese de doutorado – Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.
- BOS, H. J. M. *Differentials, high-order differentials and derivative in the Leibnizian calculus*. Berlin: Srpinge-Verlag, 1974.
- BOYER, C. *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications, 2016.
- GRESPLAN, J. *O negativo do capital: o conceito de crise na crítica de Marx à economia política*. São Paulo: Expressão Popular, 2012.
- GRESPLAN, J. *Marx e a crítica do modo de representação capitalista*. São Paulo: Boitempo, 2019.
- KEYNES, J. M. *A teoria geral do emprego, do juro e da moeda*. Tradução: Rolf Kuntz. São Paulo: Nova Cultural, 1985.
- KOSELLECK, R. *Crítica e crise: uma contribuição à patogênese do mundo burguês*. Tradução: Luciana Villas-Boas Castelo-Branco. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999.
- LEIBNIZ, G.W. *La naissance du calcul différentiel*. Introdução, tradução e notas: Marc Parmentier. Paris: Vrin, 1995.
- LEIBNIZ, G.W. *Philosophical papers and letters*. Tradução: Leroy E. Loemker. 2. ed. Dordrecht/ Boston/ Londres: Kluwer Academic Publishers, 1989.
- LEIBNIZ, G.W. *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole et la trigonométrie sans tables trigonométrique qui en est le corollaire*. Introdução, tradução e notas: Marc Parmentier. Paris: Vrin, 2004.
- MARX, K. *Grundrisse: manuscritos econômicos de 1857-1858: esboços da crítica da economia política*. Tradução: Mario Duayer e Nélio Schneider (colaboração de Alice Helga Werner e Rudiger Hoffman). São Paulo: Boitempo, 2011.
- MARX, K. *O Capital: crítica da economia política*. Tradução: Reginaldo Sant'Anna. 22 ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2004. v. 1.
- MARX, K. *O Capital: crítica da economia política*. Tradução: Reginaldo Sant'Anna. 20 ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2005. v. 2.
- MARX, K. *O Capital: crítica da economia política*. Tradução: Reginaldo Sant'Anna. 12 ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008a. v. 3.
- MARX, K. *O Capital: crítica da economia política*. Tradução: Reginaldo Sant'Anna. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008b. v. 4.
- MARX, K. *O Capital: crítica da economia política*. Tradução: Reginaldo Sant'Anna. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008c. v. 5.

- MARX, K. *O Capital: crítica da economia política*. Tradução: Reginaldo Sant'Anna. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008d. v. 6.
- MARX, K. *Teorias da mais-valia: história crítica do pensamento econômico*. Tradução: Reginaldo Sant'Anna. São Paulo: Difel, 1980. v. 2
- PARMENTIER, M. Introdução. In: LEIBNIZ, G. W. *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole et la trigonométrie sans tables trigonométrique qui en est le corollaire*. Introdução, tradução e notas: Marc Parmentier. Paris:Vrin, 2004.
- PARMENTIER, M. L'optimisme mathématique. In: LEIBNIZ, G. W. *La naissance du calcul différentiel*. Introdução, tradução e notas: Marc Parmentier. Paris:Vrin, 1995.
- RABOUIN, D. Leibniz's rigorous foundations of the method of indivisibles. In: JULLIEN, V. (Org.). *Seventeenth-century indivisibles revisited*. [S. l.]: Birkhäuser, 2015a.
- RABOUIN, D. The difficulty of being simple: on some interactions between mathematics and philosophy in Leibniz's analysis of notions. In: GOETHE, N. B.; BEELEY, P.; RABOUIN, D. (Org.). *G. W. Leibniz, Interrelations between mathematics and philosophy*. California, EUA: Series Editor, 2015b.
- SCHUMPETER, J. A. *Historia del análisis económico*. Tradução: Lucas Mantilla. Cidade do México: Fondo de cultura económica, 1984.
- SMITH, A. *A riqueza das nações*. Tradução: Alexandre Amaral Rodrigues e Eunice Ostrensky. São Paulo: Martins Fontes, 2003. v. 1
- SMITH, A. *A riqueza das nações*. Tradução: Alexandre Amaral Rodrigues e Eunice Ostrensky. São Paulo: Martins Fontes, 2003. v. 2